Zum Unterkapitel „Zahlenrätsel“ gibt es nur ein Modul. In den folgenden Aufgaben werden Eigenschaften von Zahlen benannt. Daraus ist die Zahl zu bestimmen. Insbesondere geht es auch darum, eine geschickte, also zeitsparende, Vorgehensweise zu finden. In vielen Fällen helfen Überlegungen zur Teilbarkeit, den Aufwand entscheidend zu verkürzen. Diese Unterrichtsinhalte können bekannt sein, sie können aber auch bei der Besprechung der Aufgaben als neue Inhalte den Schülerinnen und Schülern angeboten werden. Eventuell werden sie von den Lernenden während der Aufgabenlösung entdeckt.

# Olympiadeaufgabe 480435

Die Aufgabe ist als Einführungsaufgabe für das Modul „Zahlenrätsel“ geeignet. Die Schülerinnen und Schüler können beginnen, werden wahrscheinlich auch eine Lösung finden und in der Rückschau daraus geeignete Strategien für Lösungen zu Aufgaben des gleichen Typs entwickeln.

**Aufgabe:**

Wie heißt meine Zahl?

* Meine Zahl hat bei Division durch 5 und bei der Division durch 7 den Rest 3.
* Meine Zahl ist kleiner als 400.
* Der Vorgänger meiner Zahl ist durch 8 teilbar.
* Der Nachfolger meiner Zahl ist durch 3 teilbar.

**Lösungsvorschlag:**

In einer Tabelle werden systematisch alle Vielfachen von 8 untersucht:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Vorgänger (Vielfaches von 8) | Zahl | Nachfolger | Teilbar durch 3? | Rest bei Division durch 5 | Rest bei Division durch 7 |
| 8 | 9 | 10 | Nein | 4 |  |
| 16 | 17 | 18 | Ja | 2 |  |
| 24 | 25 | 26 | Nein | 0 |  |
| 32 | 33 | 34 | Nein | 3 |  |
| 40 | 41 | 42 | Ja | 1 |  |
| 48 | 49 | 50 | Nein | 4 |  |
| 56 | 57 | 58 | Nein | 2 |  |
| 64 | 65 | 66 | Ja | 0 |  |
| 72 | 73 | 74 | Nein | 3 |  |
| 80 | 81 | 82 | Nein | 1 |  |
| 88 | 89 | 90 | Ja | 4 |  |

Die Tabelle kann bis 400 weitergeführt werden. Dadurch lassen sich alle Zahlen finden, die die Bedingungen erfüllen.

Es lassen sich jedoch auch verschiedene Muster in der Tabelle erkennen, die ausgenutzt werden können:

* jedes dritte Vielfache von 8 führt auf eine Zahl, die durch 3 teilbar ist.
* Genau die Zahlen mit der Endziffer 3 lassen bei Division durch 5 den Rest 3. Die Differenz zwischen den Zahlen mit der Endziffer 3 ist stets 40.
* Die schwierigere Division durch 7 muss nur dann ausgeführt werden, wenn alle anderen Bedingungen erfüllt sind.

Nutzt man diese Erkenntnis aus, muss nur noch jedes 3. bzw. 5. Vielfache von 8 untersucht werden.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Vorgänger (Vielfaches von 8) | Zahl | Nachfolger | Teilbar durch 3? | Rest bei Division durch 5 | Rest bei Division durch 7 |
| 72 | 73 | 74 | Nein | 3 |  |
| 112 | 113 | 114 | Ja | 3 | 1 |
| 152 | 153 | 154 | Nein | 3 |  |
| 192 | 193 | 194 | Nein | 3 |  |
| 232 | 233 | 234 | Ja | 3 | 2 |
| 272 | 273 | 274 | Nein | 3 |  |
| 312 | 313 | 314 | Nein | 3 |  |
| 352 | 353 | 354 | Ja | 3 | 3 |
| 392 | 393 | 394 | Nein | 3 |  |

Als einzige Lösungszahl ergibt sich damit die Zahl 353.

**Anmerkungen zur Aufgaben und zum Einsatz:**

Die Aufgabe lässt sich durch die Schülerinnen und Schüler mit unterschiedlichen Vorgehensweisen bearbeiten. Daher sollten sie zunächst selbständig in Gruppenarbeit die Lösung versuchen. Die Schülerinnen und Schüler werden schnell erkennen, dass ein zielloses Suchen wenig Erfolg hat, und Systematisierungen versuchen. Im einfachsten Fall werden alle Zahlen von 1 bis 399 aufgelistet und auf die Gültigkeit der gestellten Bedingungen überprüft. Diese Vorgehensweise ist durchaus in Ordnung, weil sich dadurch Ideen für Einschränkungen des Suchaufwandes finden lassen, ähnlich wie das in dem Lösungsvorschlag vorgestellt wurde.

Nach der Gruppenarbeitsphase werden die verschiedenen Lösungswege präsentiert und verglichen. Man kann versuchen, den kürzesten Weg zu finden, eventuell zu prämieren und dadurch zur Diskussion verschiedener Lösungsstrategien zu kommen.

Mögliche Fragestellungen hierbei sind:

* Welche Bedingung lässt nur noch wenige Kandidaten übrig, die weiter zu untersuchen sind?
* Wie viele Kandidaten blieben dabei übrig?
* Wie lassen sich die Überprüfungen übersichtlich dokumentieren?
* Erkennt man bei der Dokumentation (in der Tabelle) Muster, die ausgenutzt werden können?
* Kann man arbeitsteilig in den Gruppen vorgehen? (Jeder untersucht bei zu vielen Kandidaten nur einen Ausschnitt.)

**Ergänzungen der Aufgabe:**

Durch Kombination von Bedingungen lassen sich manchmal neue Bedingungen finden, die nur noch wenige Kandidaten übrig lassen. Bei dieser Aufgabe könnte man versuchen, die erste Bedingung auszubauen.

Eine ergänzende Aufgabensequenz, die Forschungsmöglichkeiten bietet, ist:

* Schreibe alle Zahlen auf, die bei Division durch 2 und bei Division durch 3 den Rest 1 lassen. Prüfe, bei welcher anderen Division diese Zahlen auch den Rest 1 lassen.
* Prüfe in gleicher Weise die Zahlen, die bei Division durch 3 und durch 5 jeweils den Rest 2 lassen.
* Wende Deine Erkenntnisse auf die Lösung der Ausgangsaufgabe an.

Eine Begründung der Gesetzmäßigkeit ist in der Klasse 5/6 nicht zu erwarten. Setzt man diese Aufgabe in höheren Klassenstufen ein, kann durchaus wie folgt argumentiert werden:

Die Zahl *n* lässt bei Division durch 5 den Rest 3, also .

Die Zahl *n* lässt bei Division durch 7 den Rest 3, also .

Kombination liefert . Somit ist a durch 7 und b durch 5 teilbar, also .

Somit ist . Bei Division durch 35 bleibt der Rest 3.

Für besonders leistungsstarke Schülerinnen und Schüler kann das Forschungsprojekt auch noch auf nicht-teilerfremde Zahlen ausgeweitet werden, etwa die Untersuchung der Zahlen, die bei Division durch 2 und durch 6 jeweils den Rest 1 lassen. Werden die Zahlen 6 und 10 gewählt, kann als Ergebnis solcher Forschungen sogar der Begriff des kgVs von den Schülerinnen und Schülern gefunden werden.

Olympiadeaufgabe 450621

**Aufgabe:**

Frank fragt Jan, wie viele Schüler in seiner Klasse sind. Jan antwortet nicht ganz direkt:

„Multipliziert man die Schülerzahl in meiner Klasse mit 5, so ist die Quersumme dieses Produktes doppelt so groß wie die Quersumme der Schülerzahl. Außerdem ist das Produkt durch 6 teilbar. Ach ja, in meiner Klasse können 26 Schüler Rad fahren und 12 Schüler schwimmen, und jeder Schüler kann mindestens eins von beiden.“

**Lösungsvorschlag:**

Die Zahl der Schüler in der Klasse liegt zwischen 26 (wenn alle Radfahrer auch schwimmen können) und 38 (wenn kein Radfahrer schwimmen kann). Wenn das Fünffache der Schülerzahl durch 6 teilbar ist, ist auch die Schülerzahl durch 6 teilbar. Damit kommen nur die Schülerzahlen 30 oder 36 in Frage.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Schülerzahl | Quersumme | 5 ∙ Schülerzahl | Quersumme | Gleich? |
| 30 | 3 | 150 | 6 | Nein |
| 36 | 9 | 180 | 9 | Ja |

Damit beträgt die Schülerzahl 36.

Die Lösung ist nur dann so kurz, wenn die Bedingungen geschickt ausgewertet werden. Eventuell werden Schülerinnen und Schüler mit mehr Schülerzahlen, die als Kandidaten in Frage kommen, arbeiten.

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Die Aufgabe ist zunächst wegen der Einkleidung für Schülerinnen und Schüler attraktiv, zugleich bietet die Einkleidung aber auch eine zusätzliche Schwierigkeit, denn die Bedingungen, die an die gesuchte Zahl gestellt werden, müssen aus dem Aufgabentext erst gefunden werden. Diese Suche gibt Anlass zu umfangreichen Diskussionen der Schülerinnen und Schüler untereinander.

Wird die Teilbarkeit der Schülerzahl durch 6 nicht gefunden, ist eine Untersuchung aller Zahlen zwischen 26 und 38 auch noch zumutbar. Dabei fällt möglicherweise auf, welcher Zusammenhang bezüglich der Teilbarkeit zwischen den Zahlen und dem Fünffachen besteht. Daraus lassen sich leicht Erweiterungen der Aufgabe finden.

Auch wenn die obere Begrenzung durch die Zahl 38 nicht gefunden wird, werden die Schülerinnen und Schüler die (kleinste) Lösung 36 finden. Erfahrungsgemäß beenden die meisten danach die Suche, weil sie Aufgaben, die nicht eindeutig lösbar sind, bisher nur selten (oder noch nie) kennen gelernt haben.

**Erweiterungen der Aufgabe:**

* Das Fünffache einer Zahl ist durch 3 teilbar. Was kann man über die Zahl aussagen?
* Das Sechsfache einer Zahl ist durch 3 teilbar. Was kann man über die Zahl aussagen?
* Formulieren eine Regel, die angibt, wann man aus der Teilbarkeit des Vielfachen einer Zahl etwas über die Teilbarkeit der Zahl aussagen kann.

Olympiadeaufgabe 430524

**Aufgabe:**

Die Panzerknacker flüchten in einem Auto. Zwei Mathematiker sind Zeuge. Bei der Polizei macht der erste folgende Angaben zum Kennzeichen:

* Die Zahl auf dem Kennzeichen ist vierziffrig
* Sie beginnt mit der Ziffer 5.
* Die Zahl ist eine Quadratzahl.
* Die Endziffer der Zahl auf dem Kennzeichen ist gleich der Endziffer der Zahl, deren Quadrat die Zahl auf dem Kennzeichen ist.

Kann die Polizei die Zahl auf dem Kennzeichen aus diesen Angaben eindeutig ermitteln? Wenn ja, gib die Zahl an; wenn nein, gib an, welche Kennzeichen-Zahlen möglich sind.

Der Kollege des ersten Mathematikers sagt:

* Mein Kollege hat mit fast allem Recht, aber die Zahl begann mit einer Sechs.

Kann die Polizei aus diesen Angaben die Zahl eindeutig bestimmen?

**Lösungsvorschlag:**

Es empfiehlt sich, zunächst zu untersuchen, bei welchen Zahlen die Endziffer mit der Endziffer der Quadratzahl übereinstimmt. Dazu kommen nur die Zahlen in Frage, die auf 0, 1, 5 oder 6 enden.

Nun kann geprüft werden, bei welchen Zahlen die Quadrate vierziffrig sind und der Ziffer 5 beginnen. Da  und  sind, muss die Zahl größer als 70, aber kleiner als 80 sein. Zu prüfen sind 71, 75 und 76.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Zahl | Quadrat | Bedingungen erfüllt? |
| 71 | 5041 | Ja |
| 75 | 5625 | Ja |
| 76 | 5776 | ja |

Damit sind nach den Beobachtungen des ersten Mathematikers 3 Kennzeichen-Zahlen möglich.

Die nächsten möglichen Zahlen, die zu Kennzeichen mit der Startziffer 6 führen, sind 80, 81, 85, 86, ...

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Zahl | Quadrat | Bedingungen erfüllt? |
| 80 | 6400 | Ja |
| 81 | 6561 | Ja |
| 85 | 7225 | Zu groß |

Damit kommen jetzt noch zwei Zahlen in Frage.

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Durch die Bearbeitung der Aufgabe gewinnen die Schülerinnen und Schüler Kenntnisse über die Endziffern von Quadratzahlen. Diese Kenntnisse lassen sich auch in anderen Zusammenhängen nutzen.

Schülerinnen und Schüler, die diese Zusammenhänge zu Beginn noch nicht kennen, erwerben sie bei der Bearbeitung umfangreicherer Tabellen. Alternativ kann der Lehrer den Tipp geben, zunächst die Quadratzahlen zu untersuchen, oder die Hilfekarten aus der Datei „<Zahlenrätsel_Hilfe_430524.docx>“ verwenden.

Interessant ist in dieser Aufgabe die Frage nach der Eindeutigkeit von Lösungen derartiger Aufgaben.

## **Erweiterungen der Aufgabe:**

Formuliere Zeugenbeobachtungen, aus denen die Kennzeichen-Zahl eindeutig zu ermitteln ist.

Olympiadeaufgabe 430531

**Aufgabe:**

Von einer dreiziffrigen Zahl ist folgendes bekannt:

* Sie hat die Quersumme 9
* Ihre Zehnerziffer ist um 2 größer als die Einerziffer
* Die Zahl mit der gespiegelten Ziffernfolge ist um 198 größer als die Zahl selber

Wie lautet die Zahl?

**Lösungsvorschlag:**

Wenn die Einerziffer 4 ist, muss die Zehnerziffer 6 sein. Damit ist eine Quersumme von 9 nicht mehr möglich. Bei größeren Einerziffer lässt sich die geforderte Quersumme erst recht nicht mehr erreichen.

In der Tabelle werden die möglichern Zahlen nach aufsteigender Einerziffer systematisch untersucht.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| H | Z | E | Spiegelzahl | Kommentar |
| 5 | 3 | 1 | 135 | Spiegelzahl ist kleiner als die Zahl |
| 3 | 4 | 2 | 243 | Spiegelzahl ist kleiner als die Zahl |
| 1 | 5 | 3 | 351 | Spiegelzahl ist um 198 größer als die Zahl |

**Erweiterungen der Aufgabe:**

Untersuche, ob es in der Aufgabenstellung überflüssige Informationen gibt.

Die Schülerinnen und Schüler können feststellen, dass die Angabe, um wie viel die Spiegelzahl größer ist, nicht erforderlich ist. Es würde reichen, wenn die Bedingung nur „größer“ angeben würde.

Aus der Aufgabe kann leicht eine unlösbare Aufgabe konstruiert werden, wenn die Zahl 198 durch irgendeine andere Zahl ersetzt wird.

Olympiadeaufgabe 430632

**Aufgabe:**

1. Ralf ist umgezogen und hat eine neue Hausnummer. Im Mathezirkel stellt er dazu eine Aufgabe. „Meine Hausnummer liegt zwischen 100 und 200, sie ist durch 3, aber nicht durch 9 teilbar. Außerdem ist sie durch 2 und 5, aber nicht durch 4 teilbar. Wie heißt meine Hausnummer?“
2. Jens will seine Hausnummer ebenfalls raten lassen. Seine Aufgabe lautet: „Meine Hausnummer ist eine zweistellige Primzahl und hat als Ziffern ebenfalls Primzahlen. Wenn ich die Ziffern vertausche, ist die neue Zahl wieder eine Primzahl, die aber größer ist als die Hausnummer. Wie heißt meine Hausnummer?“
3. Nun will auch Ruth ein Rätsel stellen: „Meine Hausnummer ist ebenfalls eine zweistellige Primzahl. Wenn ich das Fünffache der Einerziffer und das Vierfache der Zehnerziffer addiere, erhalte ich wieder die Primzahl, die meine Hausnummer darstellt. Welche Zahl suche ich?“

#### Lösungshinweise

1. Gesucht wird eine Bedingung, mit der sich die Zahl der Möglichkeiten stark reduzieren lässt. Teilbarkeit durch 2 und 5 bedeutet, dass die Zahl mit der Ziffer 0 endet. Von diesen Zahlen muss jedoch nur jede zweite Untersucht werden, da die gesuchte Zahl nicht durch 4 teilbar sein soll.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Zahl | teilbar durch 3? | teilbar durch 9? |
| 110 | n | n |
| 130 | n | n |
| 150 | j | n |
| 170 | n | n |
| 190 | n | n |

Damit ist die gesuchte Hausnummer 150 eindeutig bestimmt.

Auch in dieser Aufgabe ist eine Information, nämlich über die Nicht-Teilbarkeit durch 9 überflüssig.

1. Als Kandidaten für die Ziffern kommen nur die Primzahlen 2, 3, 5, 7 in Frage. Da beim Vertauschen der Ziffern eine größere Zahl entstehen soll, muss die Zehnerziffer der Zahl größer sein als die Einerziffer. Alle möglichen Kombinationen werden in einer Tabelle systematisch untersucht. Stellt sich heraus, dass die gebildete Zahl keine Primzahl ist, muss nicht mehr weiter untersucht werden.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Zahl | Primzahl? | vertauschte Ziffern | Primzahl? |
| 23 | j | 32 | n |
| 25 | n |  |  |
| 27 | n |  |  |
| 35 | n |  |  |
| 37 | j | 73 | j |
| 57 | j | 75 | n |

Nur die Zahl 37 erfüllt alle Bedingungen.

1. Das Vierfache der Zehnerziffer plus dem Einfachen der Einerziffer soll eine zweistellige Zahl sein. Daher kann die Zehnerziffer nur 1 oder 2 sein. Somit müssen nur die Primzahlen zwischen 10 und 30 untersucht werden.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Zahl | 4·Z + 2·E | gleich? |
| 11 | 9 | nein |
| 13 | 19 | nein |
| 17 | 39 | nein |
| 19 | 49 | nein |
| 23 | 23 | ja |
| 29 | 53 | nein |

Nur die Zahl 23 erfüllt alle Bedingungen.

**Erweiterungen der Aufgabe:**

Bei dieser Aufgabe bietet es sich an, die Schüler selber Rätsel zu ihren Hausnummern erstellen zu lassen und diese den Mitschülern zu stellen. Dabei ist damit zu rechnen, dass auch Aufgaben gestellt werden, bei denen die Zahlen nicht eindeutig bestimmt werden können. Ebenso wird es bei den selbst erstellten Aufgaben vorkommen, dass redundante Informationen gegeben werden. Beides bietet vielfältige Möglichkeiten zu weiteren Diskussionen.

Olympiadeaufgabe 390513

**Aufgabe:**

Die Zahl 32 soll als Summe von vier ganzen Zahlen dargestellt werden, die alle größer als null sind. Es soll dabei gelten: Wenn man zum ersten Summanden 3 addiert, vom zweiten Summanden 3 abzieht, den dritten Summanden mit 3 multipliziert und den vierten Summanden durch 3 teilt, ergib t sich jedes Mal dasselbe Ergebnis.

Wie lauten die vier Zahlen?

**Lösungshinweise:**

Wird der vierte Summand durch 3 dividiert, muss sich das Dreifache des dritten Summanden ergeben. Damit muss der vierte Summand durch 9 teilbar sein, er kann also nur 9, 18 oder 27 sein. Diese Möglichkeiten werden ausprobiert.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  | Summe |
| 9 | 3 | 1 | 6 | 0 |  |
| 18 | 6 | 2 | 9 | 3 | 32 |
| 27 | 9 | 3 | 12 | 6 | 48 |

In der 1. Zeile muss die Summe nicht berechnet werden, da s3 nicht 0 sein darf. Nur die Summe 3 + 9 + 2 + 18 erfüllt alle Bedingungen

**Hinweise zum Einsatz der Aufgabe:**

In der Musterlösung wurde durch eine geschickte Kombination der Bedingungen die Zahl der Möglichkeiten, die zu untersuchen sind, stark eingeschränkt. Finden Schüler diese Kombination nicht, müssen Sie mehr Möglichkeiten durchspielen. Eventuell fällt ihnen dabei auf, dass die Teilbarkeit durch 9 eine wesentliche Rolle spielt. Anschließend kann diskutiert werden, wie diese Erkenntnis aus den Bedingungen der Aufgabenstellung folgt.